数理解析研究所講究録
581巻 1986年 69-76

REDUCEによる偏微分方程式の保存量の計算

広島大 工 伊藤雅明 (Masaaki Ito)
〃 加古富志雄 (Fujio Kako)

微分方程式の保存量を知ることは，その方程式の性質を知る上で重要であるばかりでなく，その方程式を数値計算する場合にも非常に役立つものである。ここでは，uniform rankな偏微分方程式の保存密度を求めるREDUCEプログラムを紹介する。

1. 保存則及び保存密度の求め方.

偏微分方程式

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \cdots) \qquad (1)$$

の全ての解uに対して次の保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} T(u(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x} X(u(t,x)) = 0 \qquad (2)$$

が満たされるとき，T及びXをそれぞれ保存密度及び流束と言い，

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(u(t,x))\, dx \qquad (3)$$

は保存量と呼ばれ，時間もに依存しない。ここでは，(1)式のFがuの微分多項式で且つ uniform rank である場合を考える。そこでまず rank の定義をしておく。

Fがuの微分多項式であるとすると，Fの各項は次のように表わされる，

$$c\, u_0^{d_0} u_1^{d_1} \cdots u_\ell^{d_\ell} \tag{4}$$

ただし，cは定数，$u_i = \frac{\partial^i}{\partial x^i} u$，$d_i > 0$ $(i=0,\cdots,\ell)$ である。このとき

$$D = \sum_{i=0}^{\ell} d_i \tag{5}$$

$$I = \sum_{i=0}^{\ell} i\, d_i \tag{6}$$

をそれぞれ degree 及び index と呼び，rank R は

$$R = D \cdot w_D + I \cdot w_I \tag{7}$$

で表わされる。ここで w_D 及び w_I はそれぞれ u 及び $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みである。もし多項式の全ての項の rank が等しいとき，その多項式は uniform rank であると言う。

微分方程式(1)が uniform rank であると，保存密度 T も uniform rank となるので，rank R の保存密度を求めるには，rank が R である項 T_i $(i=1,2,\cdots,m)$ の線形結合

$$T = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i \tag{8}$$

を生成し，(8)式が(2)式を満たす，即ち

$$E\left(\frac{\partial}{\partial t} T\right) = 0 \tag{9}$$

となるように未定係数 c_i を決めればよい。ここで E は次のようなオイラー演算子である，

$$E(f) = \sum_{i\geq 0} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \frac{\partial}{\partial u_i} f \quad . \tag{10}$$

この方法は非常に簡単ではあるが，高次方程式や高次の保存密度を求めるときには大量の計算が必要になり，数式処理に頼らざるを得ない。数式処理システム REDUCE で上記の処理を行うプログラムを次に紹介する。

2. REDUCE プログラム．

我々が作成した偏微分方程式の保存密度を求めるプログラムは，次の2つの部分に分かれている．

(I) DRANK(F) : 与えられた方程式 $u_t = F(u)$ が uniform rank となるように，u 及び $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みが決められるかを調べる。

(II) CONSD(F, R) : 方程式 $u_t = F$ の rank R の保存密度を探す。ただし $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みが負のときは，CONSD2(F, R, N) を使う。ここで N は予想される保存密度の u の最高次数である。

3. 実行例

具体的な例として，K-dV方程式，5次のK-dV型方程式及び変換されたK-dV方程式に適用した実行例を以下に示す。下線部は入力を表わし，プログラム中のU(I)はu_{ix}を表わす。

① K-dV方程式 $u_t = uu_x + u_{3x}$ に対して始めの5つの保存密度を求める。

```
F:=U(0)*U(1)+U(3)¥

DRANK(F)¥

DU/DT = U(3) + U(1)*U(0)
WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = 1
RANK OF UT = 5

FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(F,I)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(2) +++

 C.D. = U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(4) +++

              2
 C.D. = U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

                    2        3
 C.D. =  - 3*U(1)  + U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++

                                        2              4
 C.D. =  - 36*U(3)*U(1) - 60*U(1) *U(0) + 5*U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(10) +++

                                                                    2        2
 C.D. =  - 108*U(5)*U(1) - 252*U(3)*U(1)*U(0) - 210*U(1) *U(0)  + 7
                5
        *U(0)
```

② 5次のK-dV型方程式

$$u_t = 45u^2u_x + 15(uu_{3x} + Au_xu_{2x}) + u_{5x} \qquad (11)$$

この方程式は$A=1$のときSawada-Kotera方程式となり，$A=\frac{5}{2}$のときKaup方程式となる。これらの方程式は共に無限個の保存量が存在することが知られている。

まず，(11)式に対してu及び$\frac{\partial}{\partial x}$の重みを決めrank 6の保存密度を探すと次のように出力される。

```
% EXAMPLE 2. : THE FIFTHE ORDER K-DV TYPE EQUATION ;
F:=U(5)+45*U(0)**2*U(1)+15*(U(0)*U(3)+A*U(1)*U(2))¥

DRANK(F)¥

                                                             2
DU/DT = U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1)*A + 45*U(1)*U(0)
WEIGHT OF U = 2    WEIGHT OF DX = 1
RANK OF UT = 7

CONSD(F,6)¥
FOLLOWING CONDITION IS EXCEPTED :
     30*( - 2*A + 1)=0
FOLLOWING CONDITION IS EXCEPTED :
                2
     270*(2*A  - 7*A + 5)=0

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(6)
```

そこで上記の除外されたAの値に対して保存密度を探すと，以下のようにSawada-Kotera方程式及びKaup方程式の場合そのrankに応じた保存密度を出力する。

```
% A=1/2 :

FA:=SUB(A=1/2,F);

                                                               2
FA := (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)  )/2

DRANK(FA)¥

                                                                 2
DU/DT = (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)  )/2

WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FA,I)¥

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(6)

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(8)

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(10)

% A=1 : THE SAWADA-KOTERA EQUATION ;

FS:=SUB(A=1,F);

                                                         2
FS := U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 45*U(1)*U(0)

DRANK(FS)¥

                                                           2
DU/DT = U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 45*U(1)*U(0)

WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FS,I)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

                   2      3
 C.D. =   - U(1)    + U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++
```

```
                                      2              4
C.D. =  - U(3)*U(1) - 9*U(1) *U(0) + 3*U(0)

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(10)

% A=5/2 : THE KAUP EQUATION ;

FK:=SUB(A=5/2,F);

                                                                   2
FK := (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 75*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0) )/2

DRANK(FK)¥

                                                                     2
DU/DT = (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 75*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0) )/2

WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FK,I)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

                  2         3
C.D. =  - U(1)  + 4*U(0)

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++

                                       2              4
C.D. =  - U(3)*U(1) - 18*U(1) *U(0) + 12*U(0)

THERE IS NO CONSERVED DINSITY OF RANK(10)
```

③ 座標変換された K-dV 方程式,

$$u_t = u^3 u_{3x} + 3u^2 u_x u_{2x} + 3u^2 u_x \quad (12)$$

この方程式では, ∂_xの重みは負となるが以下に示すようにCONSD2 を使って保存密度を求めることができる。

```
% EXAMPLE 3. ;

F:=U(0)**3*U(3)+3*U(0)**2*U(1)*(U(2)+1)¥

DRANK(F)¥

                  2
DU/DT = U(0) *(U(3)*U(0) + 3*U(2)*U(1) + 3*U(1))

WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = -1

RANK OF UT = 5

USE THE COMMAND <CONSD2> TO FIND CONSERVED DENSITIES

  FOR THIS EQUATION

CONSD2(F,2,1)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(2) +++

 C.D. = U(0)

CONSD2(F,4,3)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(4) +++

                          2
 C.D. = U(0)*(U(1)  - 2*U(0))

CONSD2(F,6,5)¥

 +++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

                2                                2            2
 C.D. = U(0) *(2*U(3)*U(1)*U(0) + 5*U(2)*U(1)  + 20*U(1)  - 10*U(0)
               )
```